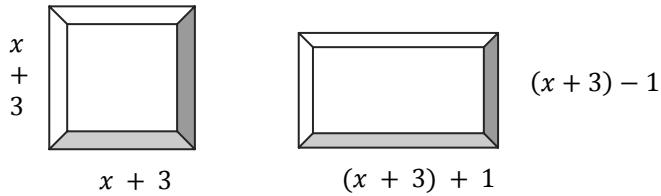


## Lección 3: Estrategias avanzadas para factorizar expresiones cuadráticas

### Trabajo en clase

#### Ejercicio inicial

Carlos quiere construir una caja de arena para su hermano pequeño. Está decidiendo entre una caja de arena cuadrada que puede representarse con  $x + 3$  unidades o una caja de arena rectangular con una longitud 1 unidades más que el lado del cuadrado, y cuyo ancho es 1 unidades menos que el lado del cuadrado.



Carlos piensa que las áreas deben ser exactamente iguales porque una unidad solo se movió de un lado al otro.

- ¿Estás de acuerdo en que las dos áreas deben ser las mismas? ¿Por qué sí o por qué no?
- ¿Cómo escribirías las expresiones que representan la longitud y el ancho de la caja de arena rectangular en términos de la longitud del lado del cuadrado?
- Si usaste las expresiones para la longitud y el ancho representados en términos del largo de un lado del cuadrado, ¿puedes entonces escribir el área del rectángulo en los mismos términos?

- d. ¿De qué forma puede verse esta expresión como el producto de una suma y la diferencia,  $(a + b)(a - b)$ ?
- e. ¿Puedes volver a escribir la expresión del área para el rectángulo como la diferencia de cuadrados:  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ ?
- f. Observa cuidadosamente tu respuesta a la última pregunta. ¿Qué te dice esto sobre las áreas de las dos figuras?
- g. ¿Puedes verificar que nuestra álgebra es correcta usando un diagrama o modelo visual?

**Ejemplo 1**

En la Lección 2 vimos que factorizar es el proceso inverso de la multiplicación. Factorizamos un polinomio invirtiendo el proceso de distribución.

Considera el siguiente ejemplo de multiplicación:

$$(x + 3)(x + 5) \rightarrow x^2 + 5x + 3x + 15 \rightarrow x^2 + 8x + 15$$

Cuando comparamos los números en forma factorizada (en color rojo) con los números en forma expandida (en color azul), vemos que 15 es el producto de los dos números en color rojo ( $3 \cdot 5$ ) y 8 es su suma ( $3 + 5$ ). Lo último es aún más evidente cuando vemos la forma expandida antes de que se combinen los términos similares (en color verde).

(Nota: cuando el coeficiente del término  $x$  es 1, generalmente no lo escribimos algebraicamente, dado que está ahí realmente como un coeficiente. Has hincapié en esto para preparar a los estudiantes para el siguiente ejemplo en el que los coeficientes del término  $x$  en los factores no son ambos 1).

¿Puedes explicar por qué existe esta relación entre los números de color rojo y los números de color azul?

**Ejemplo 2**

Ahora compara la expansión de este producto binómico con el anterior:

$$(2x + 3)(1x + 5) \rightarrow 2x^2 + 10x + 3x + 15 \rightarrow 2x^2 + 13x + 15$$

En la expresión que está entre las dos flechas (antes de combinar los términos similares), podemos ver los coeficientes de los términos lineales “divididos” ( $+10x + 3x$ ). También nota que, en este ejemplo, tenemos coeficientes en ambos términos  $x$  en los factores y que uno de los coeficientes no es 1. Tenemos 2 y 1 (en negritas) como los factores del coeficiente principal en la forma expandida y 3 y 5 como los factores del término constante. Prepárate para las expresiones cuadráticas en forma factorizada, donde ninguno de los coeficientes del término  $x$  son 1.

- a. ¿De qué forma es este producto diferente del presentado en el primer ejemplo? ¿De qué forma es semejante?
  
- b. ¿Por qué los números color verde son diferentes en los dos ejemplos?

- c. Ahora que tenemos cuatro números (coeficientes) diferentes en cada forma de la expresión, ¿cómo podemos usar los números en la forma expandida de la expresión cuadrática de la derecha para encontrar los números en los factores de la izquierda?
- d. Ahora necesitamos colocar esos números en los paréntesis para los factores, de forma que el producto corresponda con la forma expandida de la expresión cuadrática. A continuación se da una plantilla para encontrar los factores usando lo que llamamos el método producto suma:

$(\underline{x} \pm \underline{\phantom{0}})(\underline{x} \pm \underline{\phantom{0}})$  [Tenemos cuatro lugares para números que deben completarse en esta plantilla de factores].

$(\underline{x} \pm 3)(\underline{x} \pm 5)$  [Sabemos que 3 y 5 son los factores correctos de 15, así que empezaremos por ahí].

$(2x \pm 3)(1x \pm 5)$  [Sabemos que 2 y 1 son los únicos factores de 2, con el 2 opuesto al 5 de forma que el proceso de distribución nos da  $10x$  para un producto].

$(2x + 3)(x + 5)$  [Finalmente, sabemos que, al menos para este ejemplo, todos los números son positivos].

### Ejemplo 3

Ahora intenta factorizar una expresión cuadrática con algunos coeficientes negativos:  $3x^2 - x - 4$

$(\underline{x} \pm \underline{\phantom{0}})(\underline{x} \pm \underline{\phantom{0}})$  [Tenemos cuatro lugares para completar con números en esta plantilla de factores].

$(\underline{x} \pm 1)(\underline{x} \pm 4)$  [Ahora sabemos que  $\pm 1$  y  $\pm 4$  o  $\pm 2$  y  $\pm 2$  son los únicos posibles factores del término constante,  $-4$ , así que empezaremos aquí. Para comenzar, prueba con 1 y 4 y, si eso no funciona, volveremos a probar con  $\pm 2$  and  $\pm 2$ . Sabemos que solo uno de los números puede ser negativo para hacer el producto negativo].

$(1x \pm 1)(3x \pm 4)$  [Sabemos que 3 y 1 son los únicos factores de 3. También sabemos que los dos son positivos (o los dos son negativos). Pero no sabemos qué posiciones deben tomar, así que vamos a probar con ambas maneras para ver cuál da una suma de  $-1$ .]

$$(x + 1)(3x - 4)$$

[Finalmente, determinamos los dos signos que se necesitan para que el producto final sea  $3x^2 - x - 4$ ].

### Ejercicios 1–6

Factoriza la forma expandida de estas expresiones cuadráticas. Presta especial atención a los signos negativos y positivos.

1.  $3x^2 - 2x - 8$

2.  $3x^2 + 10x - 8$

3.  $3x^2 + x - 14$

[Ten en cuenta que hay un 1 como coeficiente en este caso].

4.  $2x^2 - 21x - 36$

[Esto podría ser un desafío. Si te toma demasiado tiempo, prueba con la siguiente].

5.  $-2x^2 + 3x + 9$

[Esta tiene un negativo en el coeficiente principal].

6.  $r^2 + \frac{6}{4}r + \frac{9}{16}$

[También debemos probar una con fracciones].

**Ejercicios 7–10**

Usa la estructura de estas expresiones para factorizar completamente.

7.  $100x^2 - 20x - 63$

8.  $y^4 + 2y^2 - 3$

9.  $9x^2 - 3x - 12$

10.  $16a^2b^4 + 20ab^2 - 6$

### Resumen de la lección

Una expresión polinómica de grado 2 suele llamarse **expresión cuadrática**.

Algunas expresiones cuadráticas no se pueden factorizar fácilmente. Las siguientes pistas facilitarán el trabajo:

- En la diferencia de cuadrados  $a^2 - b^2$ , cualquiera de los términos  $a$  o  $b$  puede ser un binomio si mismo.
- El método de producto suma es útil pero puede ser complicado cuando el coeficiente principal no es 1.
- El método de prueba y error es una estrategia viable para encontrar los factores.
- Comprueba tus respuestas multiplicando los factores para asegurarte de obtener nuevamente la expresión cuadrática original.

### Conjunto de problemas

Factoriza las siguientes expresiones cuadráticas.

1.  $3x^2 - 2x - 5$
2.  $-2x^2 + 5x - 2$
3.  $5x^2 + 19x - 4$
4.  $4x^2 - 12x + 9$  [Esta es complicada, pero busca un patrón especial].
5.  $3x^2 - 13x + 12$