

Lección 13: Cambio de base

Trabajo en clase

Ejercicios

Supongamos que $x, a, y b$ son todos números reales positivos, por lo que $a \neq 1$ y $b \neq 1$. ¿Cuál es el $\log_b(x)$ en términos de $\log_a(x)$? La ecuación resultante nos permite cambiar la base de un logaritmo de a a b .

Aproxima cada uno de los siguientes logaritmos a cuatro cifras decimales. Utiliza la tecla **LOG** en tu calculadora en lugar de las tablas de logaritmos, cambiando primero la base del logaritmo a 10 si es necesario.

a. $\log(3^2)$

b. $\log_3(3^2)$

c. $\log_2(3^2)$

En la Lección 12, justificamos una serie de propiedades de los logaritmos de base 10. Trabajando en parejas, justifica las siguientes propiedades de los logaritmos de base b .

a. $\log_b(1) = 0$

b. $\log_b(b) = 1$

c. $\log_b(b^r) = r$

d. $b^{\log_b(x)} = x$

e. $\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$

f. $\log_b(x^r) = r \cdot \log_b(x)$

g. $\log_b\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_b(x)$

h. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$

Encuentra cada uno de los siguientes cuatro lugares decimales. Utiliza la tecla en tu calculadora en lugar de la tabla.

a. $\ln(3^2)$

b. $\ln(2^4)$

Escríbelo como un solo logaritmo:

a. $\ln(4) - 3\ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln(2)$

b. $\ln(5) + \frac{3}{5}\ln(32) - \ln(4)$

Escribe cada expresión como una suma o resta de constantes y los logaritmos en términos más simples.

a. $\ln\left(\frac{\sqrt{5x^3}}{e^2}\right)$

b. $\ln\left(\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right)$

Resumen de la lección

Hemos establecido una fórmula para cambiar la base de los logaritmos de b a a :

$$\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}.$$

En particular, la fórmula nos permite cambiar los logaritmos de base b para los logaritmos comunes o naturales, los cuales son los únicos dos tipos de logaritmos que calculadoras son capaces de calcular:

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)} = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}.$$

También hemos establecido las siguientes propiedades para los logaritmos de base b . Si x, y, a y b son todos números reales positivos donde $a \neq 1$ y $b \neq 1$ y r es cualquier número real, entonces:

$$\begin{aligned}\log_b(1) &= 0 \\ \log_b(b) &= 1 \\ \log_b(b^r) &= r \\ b^{\log_b(x)} &= x \\ \log_b(x \cdot y) &= \log_b(x) + \log_b(y) \\ \log_b(x^r) &= r \cdot \log_b(x) \\ \log_b\left(\frac{1}{x}\right) &= -\log_b(x) \\ \log_b\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_b(x) - \log_b(y)\end{aligned}$$

Conjunto de Problemas

1. Evalúa cada una de las siguientes expresiones logarítmicas, aproximándolas a cuatro cifras decimales si es necesario. Utiliza la tecla **LN** o **LOG** en tu calculadora en lugar de la tabla.

- $\log_8(16)$
- $\log_7(11)$
- $\log_3(2) + \log_2(3)$

Utiliza las propiedades logarítmicas y el hecho de que $\ln(2) \approx 0.69$ y $\ln(3) \approx 1.10$ para aproximar el valor de cada una de las siguientes expresiones logarítmicas. No uses una calculadora.

- $\ln(e^4)$
- $\ln(6)$
- $\ln(108)$
- $\ln\left(\frac{8}{3}\right)$

Compara los valores de $\log_{\frac{1}{9}}(10)$ y $\log_9(\frac{1}{10})$ sin usar la calculadora.

Demuestra que para cualquiera de los números positivos a y b con $a \neq 1$ y $b \neq 1$, $\log_a(b) \cdot \log_b(a) = 1$.

Expresa x en términos de a , e , y y si $\ln(x) - \ln(y) = 2a$.

Reescribe cada expresión en la forma equivalente que únicamente contiene un logaritmo de base 10.

- $\log_2(800)$
- $\log_x\left(\frac{1}{10}\right)$, para valores reales positivos de x diferentes de 1
- $\log_5(12,500)$
- $\log_3(0.81)$

Escribe cada número en términos de logaritmos naturales, y después usa las propiedades de los logaritmos para demostrar que es un número racional.

- $\log_9(\sqrt{27})$
- $\log_8(32)$
- $\log_4\left(\frac{1}{8}\right)$

Escribe cada expresión como una expresión equivalente con un solo logaritmo. Supongamos que x , y y z son números reales positivos.

- $\ln(x) + 2 \ln(y) - 3 \ln(z)$
- $\frac{1}{2}(\ln(x+y) - \ln(z))$
- $(x+y) + \ln(z)$

Reescribe cada expresión como sumas y restas en términos de $\ln(\square)$, $\ln(\square)$ y $\ln(\square)$.

- $\ln(xyz^3)$
- $\ln\left(\frac{e^3}{xyz}\right)$
- $\ln\left(\sqrt{\frac{x}{y}}\right)$

Resuelve las siguientes ecuaciones en términos de logaritmos de base 5. Después, utiliza el cambio de las propiedades de base y una calculadora para calcular la solución a la 1000° más cercana. Si la ecuación no tiene solución, explica por qué.

- $5^{2x} = 20$
- $75 = 10 \cdot 5^{x-1}$
- $5^{2+x} - 5^x = 10$
- $5^{x^2} = 0.25$

En la Lección 6, descubriste que $\log(x \cdot 10^k) = k + \log(x)$ al ver la tabla de logaritmos. Utiliza las propiedades de los logaritmos para justificar esta propiedad para una base arbitraria $b > 0$ con $b \neq 1$. Es decir, demuestra que $\log_b(x \cdot b^k) = k + \log_b x$.

Larissa argumentó que como $\log_2(2) = 1$ y $\log_2(4) = 2$, entonces debe ser cierto que $\log_2(3) = 1.5$. ¿Está en lo correcto? Explica cómo lo sabes.

EXTENSIÓN. Supongamos que hay cierto número positivo b de manera que:

$$\log_b(2) = 0.36$$

$$\log_b(3) = 0.57$$

$$\log_b(5) = 0.84.$$

- a. Utiliza los valores dados de $\log_b(2)$, $\log_b(3)$, y $\log_b(5)$ para evaluar los siguientes logaritmos.

- i. $\log_b(6)$
- ii. $\log_b(8)$
- iii. $\log_b(10)$
- iv. $\log_b(600)$

- b. Utiliza la fórmula de cambio de base para convertir $\log_b(10)$ a base 10, y resuelve para b . Redondea tu respuesta a 4 cifras decimales.

Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales.

- a. $2^{3x} = 16$
- b. $2^{x+3} = 4^{3x}$
- c. $3^{4x-2} = 27^{x+2}$
- d. $4^{2x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{3x}$
- e. $5^{0.2x+3} = 625$

Resuelve cada ecuación exponencial.

- a. $3^{2x} = 81$
- b. $6^{3x} = 36^{x+1}$
- c. $625 = 5^{3x}$
- d. $25^{4-x} = 5^{3x}$
- e. $32^{x-1} = \frac{1}{2}$
- f. $\frac{4^{2x}}{2^{x-3}} = 1$
- g. $\frac{1}{8^{2x-4}} = 1$
- h. $2^x = 81$
- i. $8 = 3^x$
- j. $6^{x+2} = 12$

- k. $10^{x+4} = 27$
- l. $2^{x+1} = 3^{1-x}$
- m. $3^{2x-3} = 2^{x+4}$
- n. $e^{2x} = 5$
- o. $e^{x-1} = 6$

En el problema 9(e) de la Lección 12, resolviste la ecuación $3^x = 7^{-3x+2}$ utilizando el logaritmo de base 10.

- a. Resuelve $3^x = 7^{-3x+2}$ usando el logaritmo de base 3.
- b. Aplica la fórmula de cambio de base para demostrar que tu respuesta de la parte (a) concuerda con tu respuesta al problema 9(e) de la Lección 12.
- c. Resuelve $3^x = 7^{-3x+2}$ usando el logaritmo de base 7.
- d. Aplica la fórmula de cambio de base para demostrar que tu respuesta de la parte (c) también concuerda con tu respuesta al problema 9(e) de la Lección 12.

Pearl resolvió la ecuación $2^x = 10$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\log(2^x) &= \log(10) \\ x \log(2) &= 1 \\ x &= \frac{1}{\log(2)}.\end{aligned}$$

Jess resolvió la ecuación $2^x = 10$ como se muestra a continuación:

$$\begin{aligned}\log_2(2^x) &= \log_2(10) \\ x \log_2(2) &= \log_2(10) \\ x &= \log_2(10).\end{aligned}$$

¿Tiene Pearl la razón? ¿Tiene Jess la razón? Explica cómo lo sabes.